ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 13 MAI 1918.

PRÉSIDENCE DE M. Léon GUIGNARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les formes quadratiques indéfinies d'Hermite.* Note [1] de M. G. Humbert.

1. La présente Note fait suite à celle du 8 avril dernier [2]; j'y poursuis l'extension, aux formes indéfinies d'Hermite, de l'analyse de Dirichlet : le résultat final exprime, par une formule simple, la somme des aires non euclidiennes des domaines fondamentaux $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, ..., introduits dans ma dernière Note.

Partons de la formule (2) de celle-ci :

$$(2) \qquad \sum f^{-s}(x_i, y_i) + \sum' f'^{-s}(x'_i, y'_i) + \ldots = 2 \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{n^{s-1}} \quad \ldots;$$

au premier membre, f, f', ... désignent des formes d'Hermite proprement primitives de déterminant positif, D, que nous supposerons choisies *une par classe*, de manière que leurs premiers coefficients, a, a', ..., soient positifs et *premiers à* 2D; la somme Σ porte sur les entiers complexes x_i, y_i, tels :

1° Que $f(x_i, y_i)$ soit premier à 2D;

2° Que le point $z_i = x_i : y_i$ appartienne au domaine fondamental, $\mathcal{D}$, qui est celui du groupe Γ des substitutions de déterminant $+1$ changeant la

---

[1] Séance du 6 mai 1918.

[2] *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 581.

forme $f(x, y)$ en elle-même. On suppose de plus que ϖ est à l'extérieur de la circonférence C, équateur de la sphère représentative de f, ce qui entraîne $f(x_i, y_i) > 0$.

Des définitions analogues s'appliquent aux sommes Σ', ..., en introduisant ϖ' et f', ..., au lieu de ϖ et f.

Au second membre de (2), les Σ portent sur les entiers réels positifs, n, premiers à $2D$.

2. On reconnaît d'abord que, dans la première somme du premier membre, les systèmes x_i, y_i qui satisfont à la condition 1° sont, *par rapport au module* $2D$, en nombre égal à

$$(3) \qquad 4D^2\Phi(2D),$$

$\Phi(2D)$ étant le nombre des entiers complexes, distincts entre eux (mod $2D$), et premiers à $2D$. On sait, par la Théorie générale des nombres quadratiques, que, si l'on désigne par $q, q_1, \ldots$ les facteurs premiers réels de D, qui sont impairs, distincts, et supérieurs à 1; par $q', q'_1, \ldots$ ceux des $q, q_1, \ldots$ qui sont du type $4h+1$; par $q'', q''_1, \ldots$ ceux des $q, q_1, \ldots$ qui sont du type $4h-1$, on a l'expression

$$(4) \qquad \Phi(2D) = 2D^2\Pi_{q'}\left(1-\frac{1}{q'}\right)^2\Pi_{q''}\left(1-\frac{1}{q''^2}\right).$$

Cela dit, on peut poser, dans (2),

$$(5) \qquad x_i = \alpha_i + 2Dv, \qquad y_i = \gamma_i + 2Dw,$$

α_i, γ_i parcourant successivement $4D^2\Phi(2D)$ systèmes déterminés d'entiers complexes, et v, w étant des entiers complexes *quelconques*, tels cependant que x_i, y_i satisfassent à la condition 2° ci-dessus.

Faisons maintenant $s = 2 + \rho$; multiplions les deux membres de (2) par ρ, et cherchons leurs limites respectives quand ρ tend vers *zéro* par valeurs positives.

3. *Limite du premier membre.* — Prenons d'abord ceux des termes de la première somme Σ qui répondent aux valeurs (5) de x_i, y_i, où α_i, γ_i sont regardés comme fixes. *Pour cette somme partielle*, la limite cherchée, on le le voit par une extension bien facile de la méthode de Dirichlet, est celle,

pour $t=\infty$, de $2T:t^2$, en désignant par T le nombre des termes de la somme partielle qui sont au plus égaux à t.

En d'autres termes, T est le nombre des systèmes v, w, entiers complexes, satisfaisant d'abord à l'inégalité

$$f(\alpha_i+2Dv, \gamma_i+2Dw)\leqq t, \tag{6}$$

et ensuite à la condition que le point $x_i:y_i$, défini par (5), appartienne au domaine $\mathfrak{D}$.

Posons

$$\xi=\frac{\alpha}{\sqrt{t}}+\frac{2D}{\sqrt{t}}v, \qquad \eta=\frac{\gamma}{\sqrt{t}}+\frac{2D}{\sqrt{t}}; \tag{7}$$

on aura

$$f(\xi, \eta)\leqq 1 \tag{8}$$

et le point $\xi:\eta$ du plan analytique devra appartenir à $\mathfrak{D}$.

Si l'on pose

$$\xi=x_1+ix_2, \qquad \eta=y_1+iy_2,$$

les points ξ, η sont, d'après (7), *dans l'espace à quatre dimensions*, les sommets d'un réseau rectangulaire, dont la *maille* est un *cube* de côté $2D:\sqrt{t}$; en vertu de (8) et de la condition relative à $\mathfrak{D}$, ces points restent à l'intérieur d'un *volume* $\mathfrak{V}$, et il est clair que T est, à la limite ($t=\infty$), le quotient du volume, V, de $\mathfrak{V}$, par celui de la *maille*, c'est-à-dire que

$$T=\frac{Vt^2}{16D^4}, \qquad \text{d'où} \qquad \lim\frac{2T}{t^2}=\frac{V}{8D^4}, \tag{9}$$

et tout revient à évaluer V, c'est-à-dire

$$V=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{\mathfrak{V}} dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2.$$

Prenons pour variables, au lieu de ξ, η les quantités η et $\xi:\eta$, c'est-à-dire posons

$$z=\frac{\xi}{\eta}=z_1+iz_2;$$

nous aurons

$$V=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dz_1\,dz_2\,dy_1\,dy_2(y_1^2+y_2^2),$$

le champ étant défini par l'inégalité (8), à savoir

$$y_1^2 + y_2^2 \leqq \frac{1}{f(z, 1)}$$

et par la condition que le point de coordonnées z_1, z_2 appartienne à $\mathfrak{D}$. On en conclut de suite, après passage à des coordonnées polaires pour y_1, y_2,

$$(10) \qquad V = \frac{2\pi}{4} \int\int_{\mathfrak{D}} dz_1\, dz_2 \frac{1}{f^2(z, 1)},$$

le champ, en z_1, z_2, étant maintenant *l'intérieur de* $\mathfrak{D}$.

Nous reviendrons tout à l'heure sur le calcul de V; observons seulement ici que, V étant, par (10), indépendant de α_i, γ_i, la limite du premier Σ, au premier membre de (2) est, en vertu de (9) et (3), égale à $V\Phi(2D) : 2D^2$, et que, dès lors, celle du premier membre tout entier sera

$$(11) \qquad \frac{\Phi(2D)}{2D^2} \Sigma V,$$

ΣV étant la somme des valeurs de V, définies par (10), qui répondent respectivement aux formes f, f', ...

4. *Limite du second membre.* — D'après Dirichlet, la limite du produit par ρ de la *deuxième somme* qui figure au second membre de (2) est

$$\varphi(2D) : 2D,$$

étant posé, avec les notations du n° 2 ci-dessus,

$$\varphi(2D) = D \Pi_{q'} \left(1 - \frac{1}{q'}\right) \Pi_{q''} \left(1 - \frac{1}{q''}\right);$$

quant à la *première somme*, elle tend vers $\sum \frac{1}{n^2}$, et l'on trouve facilement

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Pi_{q'} \left(1 - \frac{1}{q'^2}\right) \Pi_{q''} \left(1 - \frac{1}{q''^2}\right);$$

de sorte que la limite cherchée du second membre est

$$(12) \qquad \frac{\pi^2}{8} \Pi_{q'} \left(1 - \frac{1}{q'}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{q'}\right) \Pi_{q''} \left(1 - \frac{1}{q''}\right) \left(1 - \frac{1}{q''^2}\right).$$

5. *Formule finale.* — Egalons maintenant les limites des deux membres, c'est-à-dire (11) et (12); nous trouvons, en tenant compte de l'expression (4) de $\Phi(2D)$,

$$\Sigma V = \frac{\pi^2}{8} \Pi_{q'}\left(1 + \frac{1}{q'}\right) \Pi_{q''}\left(1 - \frac{1}{q''}\right),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma V = \frac{\pi^2}{8} \Pi_q \left[1 + \left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q}\right], \tag{13}$$

le produit s'étendant aux facteurs *premiers* (réels) q, de D, *impairs*, *distincts* et supérieurs à 1.

Nous poserons $V = \frac{\pi}{8D} A$; il restera

$$\Sigma A = \pi D \prod_q \left[1 + \left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q}\right]. \tag{14}$$

Or, on peut donner de A une interprétation géométrique remarquable. Soit, en effet,

$$f(x, y) = a x x_0 + b_0 x y_0 + b y x_0 + c y y_0;$$

on a, en vertu de (10),

$$\frac{1}{4} A = D \iint_{\mathfrak{D}} dz_1\, dz_2 \frac{1}{[a(z_1^2 + z_2^2) + b_0(z_1 + i z_2) + b(z_1 - i z_2) + c]^2}. \tag{15}$$

Soient maintenant S la sphère représentative de la forme f, et C son intersection (équateur) par le plan analytique $\tau = 0$; faisons correspondre au point z_1, z_2 du plan de l'équateur sa projection stéréographique sur S, à partir du pôle nord de S : aux points de $\mathfrak{D}$ répondent, sur S, les points d'un polygone sphérique, $\mathfrak{D}_1$, dont les côtés sont des arcs de petits cercles de S, orthogonaux à C. On trouve facilement, par des considérations géométriques, que la relation (15) s'écrit

$$A = \iint_{\mathfrak{D}_1} \frac{d\sigma}{\tau^2}, \tag{16}$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire euclidien sur S, et τ la distance euclidienne d'un point de l'élément $d\sigma$ au plan équateur : cette formule, remarquablement simple, montre que A est l'*aire* du polygone sphérique $\mathfrak{D}_1$ *dans le demi-espace* (non euclidien) *de Poincaré*. D'ailleurs, on peut regarder $\mathfrak{D}_1$

comme un domaine fondamental du groupe Γ *sur la sphère* S, d'après les idées de M. Bianchi; notre formule finale, à savoir

$$\Sigma A = \pi D \prod_q \left[1 + \left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q}\right], \tag{17}$$

donne donc la somme des *aires* non euclidiennes des domaines fondamentaux *sphériques* des groupes Γ, Γ', ... reproducteurs des formes f, f', ..., les aires étant mesurées dans le demi-espace de Poincaré.

Cette formule est à rapprocher de celle de M. Fatou [1], pour les formes *définies* positives d'Hermite,

$$8 \sum \frac{1}{k^{(h)}} = D \prod_q \left[1 + \left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q}\right],$$

où Σ s'étend aux réduites proprement primitives f, f', ... de déterminant (négatif) $-D$, et où $k^{(h)}$ est le nombre des transformations, de déterminant $+1$, de la forme $f^{(h)}$ en elle-même; au second membre, q a la même signification que ci-dessus : on voit donc que ΣA joue, dans le cas des formes indéfinies, le même rôle que *la densité*, $\Sigma \frac{1}{k^{(h)}}$, dans le cas des formes positives.

Remarque. — Il est bien facile d'évaluer A géométriquement : si le polygone (convexe) $\mathfrak{D}_1$ a n côtés (tous, par hypothèse, orthogonaux à C) et si $\Sigma\omega$ désigne la somme de ses angles *euclidiens*, on a, pour son *aire non euclidienne*,

$$A = (n-2)\pi - \Sigma\omega;$$

d'ailleurs, les n et les ω étant les mêmes pour $\mathfrak{D}_1$ et pour le domaine correspondant, $\mathfrak{D}$, du plan de l'équateur, on pourra vérifier la formule (17) dans tous les cas où $\mathfrak{D}$ aura été obtenu par une méthode quelconque.

Par exemple, soit $D = 7$; il n'y a qu'une classe proprement primitive, et l'on peut prendre pour $\mathfrak{D}$, d'après MM. Fricke et Klein, un polygone de 16 côtés à angles tous droits. On a donc

$$\Sigma A = 14\pi - 8\pi = 6\pi,$$

ce qui est bien égal au second membre de (17), pour $D = 7$.

On vérifie de même (17) dans les cas de $D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 142, 1906, p. 505.

MÉCANIQUE DES SEMI-FLUIDES. — *Profil de rupture d'un terre-plein sablonneux horizontal, à couches plus rugueuses dans le voisinage de son mur de soutènement vertical qui commence à se renverser.* Note de M. J. **Boussinesq.**

I. Le calcul, en première approximation, de l'état ébouleux du massif dont il s'agit, à angle φ constant de frottement intérieur et extérieur, conduit à lui substituer fictivement, comme on a vu dans ma Note du 22 avril (*Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 625), un massif à angle de frottement intérieur φ' un peu plus élevé (et croissant) à l'approche du mur, dans le coin de sable contigu à ce dernier, avec sa pointe en haut, dont l'inclinaison a sur la verticale est $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. Avec un axe vertical des x dirigé vers le bas, contre le mur, et un axe horizontal des y allant vers le gros du massif, on y a, en effet,

$$(1)\quad (\text{pour } y > ax)\quad (-N_x, -N_y) = \Pi x(1, a^2),\quad T = 0;$$

$$(2)\quad (\text{pour } y < ax)\quad (-N_x, -N_y) = \frac{\Pi(x + y \operatorname{tang}\varphi)(1, a^2)}{1 + a \operatorname{tang}\varphi},\quad T = \frac{\Pi a \operatorname{tang}\varphi}{1 + a \operatorname{tang}\varphi}(ax - y).$$

Les formules (1) s'appliquent hors du *coin* sablonneux, c'est-à-dire dans le gros du massif. Les deux pressions principales *proprement dites* y sont, *la plus faible*, $\Pi a^2 x$, horizontale ou exercée sur l'élément plan vertical; la plus forte, Πx, verticale, ou s'exerçant sur l'élément plan horizontal. Et l'élément plan, normal aux xy, qui donne lieu, au-dessous de lui et de haut en bas, sur le gros du massif, à la pression la plus *oblique* (*d'obliquité* $\sin\varphi$), est celui qui fait, avec la verticale ascendante, du côté des y positifs ou du gros du massif, l'angle $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$. C'est donc suivant cet élément plan que le massif se rompra, si un commencement de renversement du mur détermine l'éboulement d'une masse sablonneuse, à profil issu du bas du mur et montant obliquement jusqu'à la surface libre, masse ainsi sollicitée à glisser de haut en bas sur le reste sousjacent du massif, demeuré en place. Le profil de rupture sera par conséquent, dans sa partie supérieure, c'est-à-dire hors du coin sablonneux $y < ax$ contigu au mur, une simple droite, faisant avec la verticale ascendante, du côté des y positifs, l'angle $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, à tangente a.

II. Mais ce profil de rupture se trouvera beaucoup moins simple dans sa partie inférieure voisine du mur, là où s'appliquent les formules (2). Si on le suit, en effet, en s'approchant du mur, à partir de la droite $y = ax$ de raccordement des deux régions, on y voit la pression principale la plus forte (censée produite de bas en haut) s'incliner graduellement, par rapport à la verticale ascendante et du côté des y positifs ou vers le gros du massif, d'un angle *positif* β, dont le double a pour tangente le quotient de $2T$ par la différence $N_y - N_x$, d'après les formules générales et élémentaires des pressions dans tous les corps isotropes soumis à des déformations planes.

Les formules (2) donnent ainsi, en appelant finalement θ l'*angle polaire* (fait avec les x positifs) du rayon vecteur qui joint l'origine au point (x, y),

$$(3) \qquad \operatorname{tang} 2\beta = \frac{2a \operatorname{tang}\varphi}{1 - a^2} \frac{ax - y}{x + y \operatorname{tang}\varphi} = \frac{a - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\theta}.$$

Et, pour $\operatorname{tang}\theta$ décroissant de a à zéro, $\operatorname{tang} 2\beta$ grandit de zéro à a, ou, 2β, de zéro à $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Or la formule (6) de la Note citée du 22 avril donne, avec les valeurs (2), (3) ci-dessus de $-N_x$, $-N_y$, T, $\operatorname{tang} 2\beta$, et si l'on observe que $\sin\varphi'$, $\sin\varphi$, $\cos 2\beta$ sont essentiellement positifs,

$$(4) \qquad \sin^2\varphi' = \left(\frac{N_y - N_x}{N_y + N_x}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{2T}{N_y - N_x}\right)^2\right] = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2 2\beta}, \qquad \sin\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\cos 2\beta}.$$

Les angles β et φ' croissent donc sans cesse quand θ décroît, c'est-à-dire à l'approche du mur, ou quand on suit de haut en bas le profil de rupture, pour aboutir, par exemple, au pied de la face postérieure du mur.

Mais, en chaque point de la courbe de profil, celle-ci, suivie, au contraire, de bas en haut, fait visiblement avec la pression principale la plus forte, du côté des y positifs, l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$ (car φ' est partout l'angle local de frottement intérieur); et, par suite, l'angle, que j'appellerai α, de la courbe ainsi suivie en montant, avec la verticale ascendante, sera la somme $\beta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$. D'ailleurs, la tangente de cet angle total n'est autre que le coefficient angulaire changé de signe, $-\frac{dy}{dx}$, du profil de rupture dont on cherche l'équation différentielle; et l'on a ainsi

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \beta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right).$$

La dernière équation (4) montrant que le produit $\sin\varphi' \cos 2\beta$ est constant, la différentiation de ce produit fait connaître la dérivée de φ' en β; après quoi, la dérivation de la seconde (5) donne

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 1 - \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang} 2\beta. \tag{6}$$

Or le produit des deux tangentes de φ' et de 2β, qui grandissent à la fois quand on approche du mur, reçoit sa valeur la plus forte contre le mur, où, d'après (3) et (4), cette valeur a l'expression $\frac{1-a^2}{\sqrt{3-a^2}}$, visiblement inférieure à l'unité, comme l'est a. L'inclinaison $\operatorname{tang}\alpha$ du profil par rapport à la verticale ascendante se trouve donc plus forte près du mur qu'au loin, et *la courbe est concave vers le haut.*

III. Formons son équation différentielle. Exprimons, pour cela, dans le second membre de (5), la tangente de l'angle α en fonction des tangentes des deux parties de α qu'indique la deuxième formule (5), et puis, ces tangentes elles-mêmes, en fonction des cosinus des arcs doubles, cosinus dont le second est $\sin\varphi'$, défini par la dernière relation (4). Il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(1-\cos 2\beta)(\cos 2\beta + \sin\varphi)} + \sqrt{(1+\cos 2\beta)(\cos 2\beta - \sin\varphi)}}{\sqrt{(1-\cos 2\beta)(\cos 2\beta - \sin\varphi)} - \sqrt{(1+\cos 2\beta)(\cos 2\beta + \sin\varphi)}}; \tag{7}$$

après quoi, il n'y aura plus qu'à substituer à $\cos 2\beta$ sa valeur en x et y tirée de la première équation (3). Malheureusement, cette valeur, où j'appellerai u le rapport de y à ax,

$$\cos 2\beta = \frac{x + y\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(x+y\operatorname{tang}\varphi)^2 + (ax-y)^2}} = \frac{au\operatorname{tang}\varphi + 1}{\sqrt{(au\operatorname{tang}\varphi + 1)^2 + a^2(1-u)^2}}, \tag{8}$$

contient elle-même un radical du second degré portant sur un polynome homogène de ce même degré, et entraîne une grande complication du second membre de (7). L'équation étant néanmoins homogène en x et y, la séparation des variables s'y effectue par l'introduction de u. Alors les deux variables subsistant définitivement sont x et u. Appelons, pour abréger, $F(u)$, la fonction irrationnelle que devient le quotient, par a, du second membre de (7) changé de signe, après substitution à $\cos 2\beta$ de sa dernière valeur (8); et l'équation donnera presque immédiatement, en appelant l la profondeur (valeur initiale de x), d'où l'on veut que parte infé-

rieurement le profil demandé de rupture,

$$\log \frac{x}{l} = -\int_0^u \frac{du}{u + F(u)}. \tag{9}$$

IV. L'intégrale qui reste à obtenir dans le second membre est hyperelliptique, sinon même (plus probablement) abélienne. Aussi me bornerai-je au cas où le paramètre a sera censé assez petit, par rapport à l'unité, pour qu'on puisse négliger partout ses puissances supérieures à la moins élevée qui apparaîtra. Cela posé, l'expression (8) de $\cos 2\beta$, qui peut s'écrire

$$\left[1 + \frac{a^2(1-u)^2}{(1+ua\operatorname{tang}\varphi)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{a^2(1-u)^2}{\left(1 + \frac{1-a^2}{2}u\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

se simplifie par la suppression de a^2 devant l'unité et par une application de la formule du binome; ce qui la réduit à $1 - 2a^2\left(\frac{1-u}{2+u}\right)^2$. On trouve finalement

$$\frac{du}{u+F(u)} = \frac{(2+u)\,du}{1+u+u^2+\sqrt{3+6u}};$$

et, en faisant

$$\sqrt{3+6u} = t, \tag{10}$$

il vient

$$\frac{du}{u+F(u)} = \frac{2(t^2+9)\,t\,dt}{(t+3)(t^3-3t^2+9t+9)}. \tag{11}$$

Or l'équation

$$t^3 - 3t^2 + 9t + 9 = 0,$$

résolue en posant d'abord, pour faire évanouir le terme du second degré, $t = \tau + 1$ (ce qui donne la transformée $\tau^3 + 6\tau + 16 = 0$) et en appliquant ensuite la méthode de Cardan, conduit à la racine réelle

$$\tau = \sqrt{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right),$$

où γ désigne

$$\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} = 0,5557 \text{ environ},$$

et, par suite,

$$t = \tau + 1 = -0,759$$

à très peu près.

La décomposition du second membre de (11) en différentielles rationnelles simples s'effectue ensuite aisément; et l'équation (9), où la limite $u=0$ correspond à $t=\sqrt{3}$, prend la forme

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{l} = \left(\dfrac{\sqrt{3}+3}{t+3}\right)^{1,5} \left(\dfrac{t+0,759}{\sqrt{3}+0,759}\right)^{0,887} \left(\dfrac{12\sqrt{3}}{t^3-3t^2+9t+9}\right)^{0,462} \\ \quad \times e^{-0,846\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{t-1,88}{2,884}+\operatorname{arc\,tang}\frac{1,88-\sqrt{3}}{2,884}\right)}. \end{array} \right.$$

V. Il importe surtout, dans la question, de connaître l'abscisse x du point où le profil de rupture atteint la limite $y=ax$, ou $u=1$, du *champ d'hétérogénéité;* car, au delà de ce point où se termine la partie courbe du profil, le reste de celui-ci est la droite symétrique de la limite même $y=ax$ par rapport à la verticale ascendante qu'on y mène. Et l'ordonnée finale y du profil, sur la surface libre, vaut, par suite, le double de l'ordonnée même ax du point en question. Il suffit donc de faire $u=1$, ou, d'après (10), $t=3$, dans la formule (12). On trouve finalement

$$(13)\qquad \frac{x}{l}=0,5478.$$

Par suite, l'ordonnée correspondante $y=ax$ de l'extrémité de la partie courbe du profil de rupture aura, à très peu près, la valeur $0,548\,al$; et celle de l'extrémité du profil total de rupture sur la surface libre en sera le double $(1,096)\,al$. Ce sera la distance, au mur même, de la *faille* qui se trouvera dessinée sur la surface libre, si le profil de rupture part bien de la *base* du mur, située à une profondeur donnée l. La pente moyenne du profil de rupture par rapport à la verticale ascendante, en est le quotient par l. Et l'on aura, vu qu'ici les tangentes pourront être confondues avec leurs arcs,

$$(14)\qquad \text{Moy. }\alpha=(1,096)\,a=(1,096)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

VI. Cette valeur se confond presque avec l'estimation que j'en avais faite, dans deux articles de 1883 et 1884 publiés aux *Annales des Ponts et Chaussées*, en admettant que le profil de rupture avait, dans sa partie courbe, une direction moyenne assez peu différente de la direction finale, pour atteindre la limite $y=ax$ vers le milieu de la hauteur l, et, d'autre part, en assimilant à un arc de cercle cette partie courbe. On reconnaît assez

facilement que, dans le cas actuel d'une petite valeur de a, l'ensemble de ces deux hypothèses donne

$$(15) \qquad \text{Moy. } \alpha = \frac{7+\sqrt{3}}{8} a = (1,0915)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Malgré leur imparfaite justification [car la première notamment est, d'après (13), erronée d'un dixième environ], la formule (15) qu'elles donnent se trouve, on le voit, assez bien confirmée, au moins quand on se limite aux petites valeurs de a [1].

CHIMIE PHYSIQUE. — *De l'action de l'oxyde de fer sur la silice.* Note de MM. **H. Le Chatelier** et **B. Bogitch.**

La question de l'emploi des briques de silice dans les fours d'aciérie est un des problèmes industriels les plus intéressants à étudier. Tandis qu'en général les produits bien fabriqués, les bonnes machines donnent régulièrement, à l'emploi, des résultats satisfaisants, les choses se passent tout autrement avec les briques de silice. Les meilleures d'entre elles occasionnent constamment des mécomptes; il y a donc là un problème très spécial.

La température nécessaire pour la coulée de l'acier est voisine de 1650°; or le point de fusion des briques de silice atteint rarement 1750°, soit une différence de 100° au plus. Les plus légers écarts de température suffisent pour occasionner, soit une mauvaise coulée de l'acier, soit la fusion du four. Le résultat final dépend autant de l'habileté du consommateur que de celle du producteur.

Cette difficulté de la conduite du feu est encore accrue par l'action des poussières du minerai de fer que l'on ajoute au lit de fusion pour accélérer

---

[1] Je me suis borné ici à l'hypothèse d'un angle de frottement extérieur φ_1 du massif contre le mur égal à φ; car cette hypothèse, en même temps qu'elle est des plus voisines de la réalité, donne lieu aux calculs de beaucoup les plus simples. Aussi est-elle à peu près la seule usuelle. Je renverrai à un Mémoire étendu sur la *Mécanique des semi-fluides* (*sables et corps plastiques*), qui va paraître dans les premiers numéros de 1918 des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, pour le cas plus général où l'angle φ_1 différerait de φ, et aussi pour celui où il existerait, à quelque distance en arrière du mur, une seconde paroi (fixe ou mobile) influant sur l'état ébouleux du massif.

l'affinage. Ces poussières attaquent la voûte et en facilitent la fusion. C'est là le point particulier que nous nous proposons d'étudier dans cette Note. Nos expériences sont absolument d'accord avec celles de M. Rengade (¹) et les complètent sur quelques points.

Il n'y a rien à ajouter à sa description très exacte des différentes parties d'une brique usagée.

A. Zone grise, ayant subi une fusion plus ou moins complète et partiellement cristobalitique (*fig.* 1).

B. Zone noire brune, paraissant homogène à la vue, constituée par de gros cristaux de tridymite régulièrement disséminés au milieu d'un fondant ferrugineux noir (*fig.* 2).

C. Zone parsemée de taches blanches formées par les plus gros fragments de la roche quartzeuse employés à la fabrication de la brique, qui n'ont pas encore complètement disparu par recristallisation (*fig.* 3 et 4). Sur la figure 3 on voit l'emplacement d'un ancien grain de quartz qui s'est transformé sur place en tridymite assez fine, mais dont les contours primitifs n'ont pas encore complètement disparu. Sur la figure 4 on voit un grain semblable, dont le centre est resté à l'état de cristobalite. La transformation tridymitique n'est pas encore achevée.

M. Rengade réunit dans cette même zone des régions à pâte noire très foncée, identique à la masse de la zone B, et des régions à fond jaune clair, dans lesquelles le microscope montre entre les grains de silice un verre transparent, à peine jaunâtre, par suite très peu ferrugineux. A notre avis, il serait préférable de considérer cette partie de la brique comme formant une quatrième zone, car elle diffère tout à fait des précédentes par sa composition chimique.

Voici des exemples de composition chimique de ces zones :

	Brique fondue prématurément, imprégnée sur 9^cm de hauteur.			Brique ayant fait un long usage imprégnée sur 18^cm de hauteur.		
	Sulfates.	Fe^2O^3.	CaO.	Sulfates.	Fe^2O^3.	CaO.
Brique primitive.	10,5	1	2	8,5	1,5	1
Zone C..........	29,5	4,5	5	22	5,0	1,5
Zone B..........	»	»	»	26	6,5	2
Zone A	15	3,5	1,5	18	4,5	1,5

(¹) Voir plus loin, p. 779.

Brique de silice imprégnée d'oxyde de fer.

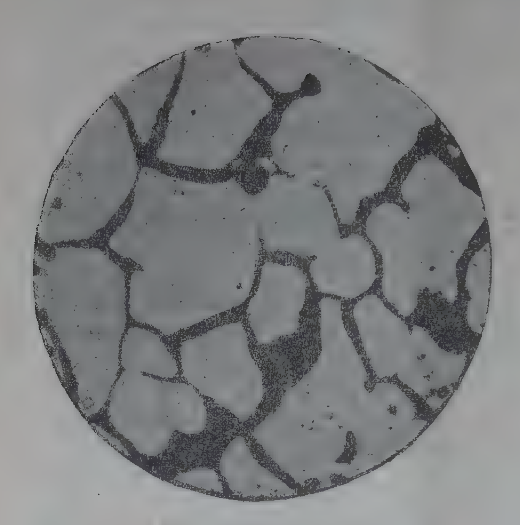


Fig. 1.

Zone A. — Gross. : 50 d.

Cristobalite irrégulièrement transformée en tridymite.

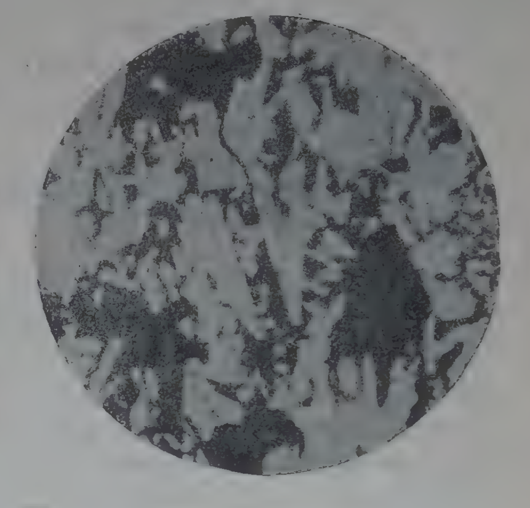


Fig. 2.

Zone B. — Gross. : 50 d.

Tridymite avec fers de lance caractéristiques.

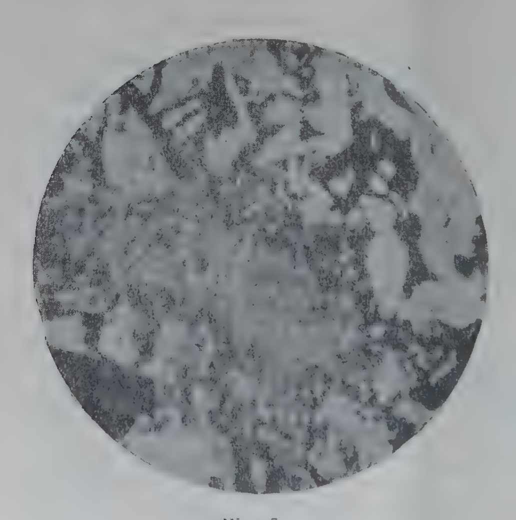


Fig. 3.

Zone C. — Gross. : 50 d.

Grain de quartz transformé en tridymite très fine.

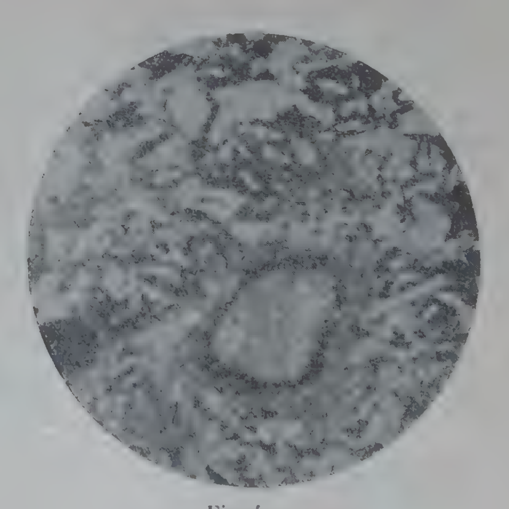


Fig. 4.

Zone D. — Gross. : 50 d.

Grain avec noyau de cristobalite et enveloppe de tridymite très fine.

Dans la partie comptée comme Fe^2O^3, il y a environ 0,5 de Al^2O^3. Ces analyses mettent en évidence deux résultats importants également signalés par M. Rengade :

1° La zone grise, directement chauffée par la flamme et exposée à l'action des poussières ferrugineuses, est moins chargée en oxydes basiques que les couches supérieures, plus éloignées cependant de l'atmosphère du four.

2° Il y a un grand enrichissement des zones brunes et jaune clair en chaux, cet enrichissement étant relativement plus considérable dans la brique qui a fondu le plus rapidement.

Nous avons étudié expérimentalement ces deux phénomènes au laboratoire.

La pénétration de l'oxyde de fer à l'intérieur de la brique se fait par ascension capillaire. En plaçant sur un morceau de brique imprégné de fer une pâte de brique semblable, mais non ferrugineuse, et chauffant pendant une heure à 1600°, on constate que la coloration due au fer s'est élevée à une hauteur de 5^{mm} environ dans la brique neuve.

Cette pénétration de l'oxyde de fer est beaucoup plus active en milieu réducteur. Une pastille de 1^g d'oxyde de fer comprimé, posée sur une brique de silice et chauffée à 1200°, provoque la formation dans la brique d'une cavité ayant exactement le diamètre et le volume de la pastille d'oxyde. Le silicate de fer formé se diffuse au-dessous, dans le corps de la brique. La même expérience, recommencée en milieu oxydant, ne donne aucune pénétration du fer jusqu'à 1400°. La pastille reste intacte à la surface de la brique.

La diminution de la proportion d'oxyde basique, dans la partie chauffée directement par la flamme, tient à ce que la brique se contracte, diminue de porosité, en expulsant la scorie ferrugineuse qui remonte dans les régions moins chaudes. Une briquette ferrugineuse, découpée dans la région B d'une brique usagée, a pris un retrait de 0,5 pour 100 après chauffage de 1 heure à 1600°. La brique primitive, non ferrugineuse, chauffée dans les mêmes conditions, avait gonflé de 5 pour 100 par suite de la transformation du quartz en silice de plus faible densité. Ce retrait va en croissant avec le temps, en même temps que les cristaux de tridymite continuent à augmenter de dimensions.

On constate très aisément sur les briques en service ce retrait, toutes les fois au moins qu'elles n'ont pas été fondues superficiellement par un coup de feu. Elles présentent, sur leur surface extérieure, une petite plaquette

dont la forme est celle de la brique, mais avec des dimensions de 10 pour 100 inférieures. Cette plaquette finit par se détacher et tomber, produisant ainsi l'usure de la brique, mais une usure très lente. Il y a seulement eu alors une demi-fusion. En cas de fusion complète par suite d'un coup de feu malencontreux, la brique coule en donnant des stalactites; ceux-ci restent suspendus à la voûte, si le chauffage a été réduit à temps; sinon la brique disparaît bientôt complètement en amenant la chute de la voûte.

Le fer métallique, placé à la surface d'une brique, y produit des trous profonds, aussi bien en atmosphère réductrice qu'en atmosphère oxydante, parce que dans tous les cas le premier degré d'oxydation du fer est le protoxyde qui se combine de suite à la silice. C'est ainsi que périssent les parois des brûleurs qui reçoivent des gouttelettes de fer fondu projetées par le bouillonnement de la masse d'acier pendant l'affinage et entraînées par le courant gazeux. Ces gouttelettes sont trop lourdes pour s'élever jusqu'à la voûte.

L'appauvrissement en chaux de la couche superficielle et l'enrichissement des couches supérieures est produit par un phénomène analogue à celui du *clairçage*. Les silicates de fer, en remontant par capillarité dans la brique, chassent devant eux les silico-aluminates de chaux préexistant dans la brique et lui servant de fondant pour la première cuisson.

Nous avons pu réaliser au laboratoire le même phénomène en prenant une baguette découpée dans une brique neuve, la plaçant verticalement sur une masse d'oxyde de fer et chauffant à 1600°. Après une heure, la répartition de la chaux était la suivante :

	Pour 100.
Brique primitive	2,07
Limite d'ascension de l'oxyde de fer	2,45
Partie en contact avec l'oxyde libre	0,88

La hauteur d'ascension de l'oxyde de fer avait été seulement de 2^{cm}. Lorsque le chauffage, au lieu de durer une heure seulement, est prolongé pendant des semaines et des mois, la distance à laquelle pénètre l'oxyde de fer est plus grande et par suite la proportion de la brique lavée par l'oxyde de fer étant plus importante, l'enrichissement en chaux des régions supérieures est plus grand.

Cet enrichissement est d'autant plus important que la destruction de la brique avance plus rapidement, parce que la largeur de chaque zone étant alors moindre, la concentration relative doit y être plus forte. Cette conclusion est bien conforme aux résultats des expériences données plus haut.

Cet enrichissement des régions moyennes en chaux présente une importance pratique très grande. Une masse renfermant 5 pour 100 de chaux, comme la zone C de la première brique étudiée, a son point de fusion voisin de 1600°, tandis que la zone A de la même brique a un point de fusion voisin de 1700°. Si par suite d'un coup de feu intempestif on dépasse momentanément 1700°, et si l'on fond la couche superficielle, la couche suivante se trouvant brusquement au contact de la flamme, avant que la capillarité ait eu le temps de l'appauvrir en oxydes basiques, va nécessairement fondre à son tour. En quelques minutes une brique pourra ainsi perdre la moitié de sa hauteur.

Une brique de silice imprégnée d'oxyde de fer se trouve donc dans une sorte d'équilibre instable; il suffit d'un coup de feu très léger pour produire un désastre. C'est là une des raisons pour lesquelles la conduite d'un four d'aciérie est une opération aussi délicate.

M. A. de Gramont présente à l'Académie un *Exposé de quelques applications de l'analyse spectrale à diverses questions intéressant la défense nationale.* Il s'agit des travaux de recherches ou d'analyse accomplis par lui en 1917 soit pour des Services de la Défense nationale, principalement pour la Section technique de l'Artillerie, soit pour divers industriels travaillant pour l'Armée ou la Marine. La majeure partie de ces recherches a porté sur la vérification de la pureté des matériaux employés ou proposés, les métaux surtout, aciers spéciaux notamment ou métaux du groupe du platine.

Chez nos Alliés britanniques ou américains, des recherches d'analyse spectrale, similaires, loin d'être abandonnées à l'initiative privée, dépendent des Services de l'État et sont rattachées au *Bureau of Standards*.

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Docteur Cabanès, *Chirurgiens et blessés à travers l'histoire. Des origines à la Croix-Rouge*. (Présenté par M. A. Laveran.)

M. **Louis Breguet** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à l'une des places de la Division, nouvellement créée, des *Applications de la Science à l'Industrie*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère, en un point de discontinuité des données.* Note de M. **Gaston Julia.**

On sait que les valeurs limites de l'intégrale de Poisson, en un point O de la circonférence qui porte les données : ou bien sont toutes identiques à la valeur en O de la donnée, si cette donnée est continue en O; ou bien varient linéairement avec l'angle que font les tangentes en O à la circonférence et à la courbe suivie par le point intérieur qui tend vers O. Le problème est moins simple pour la sphère : la présente Note a pour objet de l'élucider.

Les axes rectangulaires seront Ox, Oy, tangents en O à la sphère S, Oz dirigé vers le centre. M étant un point de la sphère, la donnée V(M) sera supposée bornée et intégrable; V(M) dépend des deux coordonnées curvilignes de M et l'on peut imaginer plusieurs modes de discontinuité en O. En voici un, très général, que j'adopterai ici. M tendant vers O sur une courbe de la sphère, on supposera que V(M) tend vers une limite dépendant seulement de la tangente OU à la courbe suivie [1]; si $\psi = \widehat{Ox, OU}$, cette limite sera une fonction $f(\psi)$, supposée finie, intégrable, admettant la période 2π. Soit alors P un point intérieur à la sphère, à la distance l du centre ; on a

$$V(P) = \frac{R^2 - l^2}{4\pi R} \int\int_S \frac{V(M)}{r^3} d\sigma, \qquad r = \overline{PM};$$

si M′ est le point où MP perce à nouveau la sphère S, on transforme l'intégrale en

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R} \int\int_S \frac{V(M)}{r'} d\sigma', \qquad r' = \overline{PM'}.$$

(1) Il pourra y avoir exception pour un nombre fini de directions OU, ou pour un ensemble infini, de mesure nulle, de directions OU.

Ainsi $V(P)$ se présente sous la forme du potentiel en P d'une simple couche étalée sur S, la densité au point M′ étant $\frac{V(M)}{4\pi R}$.

Cette densité dépend de P, c'est-à-dire qu'en un point M′, fixe, de S, la densité varie quand P varie. Si P tend vers zéro suivant une courbe tangente en O à une demi-droite OT non tangente à la sphère, en considérant sur le cercle γ que découpe dans S le plan M′OT le segment de base OT qui ne contient pas M′, lui menant en O la demi-tangente OU qui correspondra à un certain angle ψ, il est clair que la valeur limite de la densité en M′ sera $\frac{f(\psi)}{4\pi R}$. Il est alors facile, en s'aidant des propriétés de continuité du potentiel de simple couche, de démontrer que la valeur limite de $V(P)$ est

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{f(\psi)}{r'}\,d\sigma' \qquad (r' = \overline{OM'}),$$

ψ correspondant à M′ comme on vient de l'indiquer [1]. Cette limite dépend des deux angles θ_0 et ψ_0 qui fixent la direction OT [2] : $\theta_0 = \widehat{Oz, OT}$, ψ_0 est l'angle du demi-plan zOT *avec le demi-plan* zOx. La transformation suivante met en évidence cette dépendance.

Du point O projetons stéréographiquement la sphère sur le plan équatorial normal à Oz. OT perce ce plan en ω; OM′ le perce en M_1, $\overline{OM_1} = r_1$ ($d\sigma_1$ sera l'élément de surface du plan équatorial). On a $\frac{d\sigma'}{r'^2} = \frac{d\sigma_1}{r_1^2}$ et, comme $r'r_1 = 2R^2$, $\frac{d\sigma'}{r'} = 2R^2\frac{d\sigma_1}{r_1^3}$; l'intégrale précédente devient

$$\frac{R}{2\pi}\iint \frac{f(\psi)\,d\sigma_1}{r_1^3},$$

l'intégrale étant étendue à tout le plan équatorial. La valeur de ψ qui

---

[1] Pour tous les points M′ du cercle γ situés d'un même côté de OT, $f(\psi)$ a la même valeur.

[2] Si OT est tangente à la sphère, avec $\widehat{Ox, OT} = \psi$, la limite de la densité en M′ sera $\frac{f(\psi)}{4\pi R}$ quel que soit M′ sur la sphère en supposant, bien entendu, que la direction OT n'est pas une des directions exceptionnelles signalées plus haut, et la limite de l'intégrale de Poisson sera $f(\psi)$, égale à la limite de $V(M)$ quand M tend vers zéro, sur la sphère, dans la direction TO.

correspond à un point M_1 est $\psi = \psi_1 + \pi$ $\left(\psi_1 = \widehat{\omega x_1, \omega M_1}\,;\ \omega x_1\right.$ parallèle à $\left. Ox\right)$. On peut encore simplifier cette représentation. Soient T_1 le point où TO perce le plan $z = -R$, m_1 un point qui décrit le plan xOy, $d\sigma_1$ l'élément d'aire de ce plan; posant $\widehat{Ox, Om_1} = \psi_1$ et $\overline{T_1 m_1} = r_1$, il est évident que l'intégrale précédente sera égale à

$$\frac{R}{2\pi}\iint \frac{f(\psi_1 + \pi)\, d\sigma_1}{r_1^3}$$

étendue au plan xOy, qui représentera la limite de l'intégrale de Poisson quand P tend vers zéro suivant une courbe tangente à OT. Cette limite dépend en général d'une façon compliquée des deux angles θ_0, ψ_0 qui fixent OT et par suite T_1 (ces angles entrent dans r_1).

Mais voici deux remarques :

1° Si les données sont continues en O, $f(\psi)$, indépendante de ψ, est égale à $V(O)$; dans ce cas, l'intégrale

$$\frac{R}{2\pi}\iint \frac{f(\psi_1 + \pi)\, d\sigma_1}{r_1^3},$$

indépendante de θ_0, ψ_0, a pour valeur

$$\frac{R}{2\pi} V(O) \iint \frac{d\sigma_1}{r_1^3} = V(O),$$

car l'intégrale élémentaire $\iint \frac{d\sigma_1}{r_1^3} = \frac{2\pi}{R}$; la limite cherchée est $V(O)$: c'est le résultat classique.

2° Supposons les données telles qu'il y ait une ligne C de discontinuités, passant par O, ayant en O une tangente qu'on peut supposer confondue avec Ox. D'un côté de C, $V(M)$ tendra vers une valeur $V_1(O)$ quand M tendra vers O, et de l'autre côté $V(M)$ tendra vers une valeur différente $V_2(O)$. Ces deux valeurs seront deux fonctions finies du point O de C, qui peuvent n'avoir aucun rapport entre elles. On aura $f(\psi) = V_1(O)$ pour $0 < \psi < \pi$ et $f(\psi) = V_2(O)$ pour $\pi < \psi < 2\pi$. Les directions $\psi = \pm\pi$ sont exceptionnelles. Alors $\frac{R}{2\pi}\iint \frac{f(\psi_1 + \pi)\, d\sigma_1}{r_1^3}$ ne dépend que de l'angle α *que fait le demi-plan* xOy *avec le demi-plan* xOT. Le calcul de cette inté-

grale est, ici encore, élémentaire, et l'on trouve

$$\frac{R}{2\pi}\iint\frac{f(\psi_1+\pi)\,d\sigma_1}{r_1^3}=\frac{\alpha}{\pi}V_2(O)+\frac{\pi-\alpha}{\pi}V_1(O).$$

La limite de l'intégrale de Poisson, égale à $V_1(O)$ pour toute direction du demi-plan xOy, à $V_2(O)$ pour toute direction du demi-plan xOy' (Oy' opposé à Oy), *varie, entre ces deux valeurs, en fonction linéaire de l'angle* α. Ce résultat est en défaut si la direction OT, tangente à C, se confond avec Ox; l'indétermination de la limite est alors plus grande, comme je le montrerai dans le Mémoire qui développera cette Note.

ASTRONOMIE. — *Le rôle des forces dominant l'attraction dans l'architecture de la Terre et des Mondes : modèle mécanique de la formation du système solaire*. Note [1] de M. **Émile Belot**, présentée par M. Bigourdan.

La gravitation semble actuellement la force prépondérante dans l'Univers : mais elle n'est pas plus universelle que toutes les forces révélées par la Physique. Si la gravitation avait agi seule dans l'architecture des Mondes, toutes les masses d'un système seraient réunies en une seule. Il faut donc que des *forces dispersives dominant l'attraction* aient agi à l'origine pour empêcher cette agglomération amorphe : ce sont l'attraction moléculaire, la pression des gaz et vapeurs, la pression de radiation, les forces électriques et électromagnétiques, etc. Les chocs d'ensemble ou moléculaires entre des masses sont capables d'engendrer de la chaleur, de l'électricité et des rotations, c'est-à-dire la plupart des forces dispersives réelles ou virtuelles. La croissance des édifices cristallins comme celle d'un arbre, l'édification de cônes volcaniques ou des cratères lunaires sont dues au travail de forces agissant contre la pesanteur. L'architecture de la Terre est due au *déluge austral primitif* [2]. De même, toute construction humaine est le résultat d'efforts dirigés contre la pesanteur.

Mais la notion d'*architecture* peut être étendue à la structure de masses en mouvement sur lesquelles des forces antagonistes réalisent un équilibre moyen et stable : ainsi pour le système solaire. Si, d'après H. Poincaré, sa stabilité ne peut être démontrée par la Mécanique céleste en raison de

---

(1) Séance du 29 avril 1918.

(2) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 647.

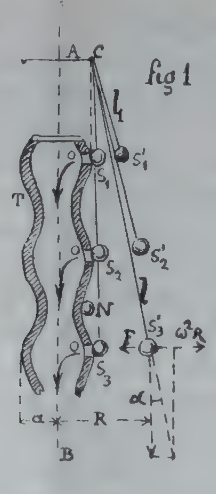
l'emploi de séries semi-convergentes, elle résulte pratiquement de l'existence de la loi exponentielle des distances des planètes et satellites [1] :

Si l'effet des marées, d'après Darwin, de la résistance du milieu d'après T. See, ou de perturbations accumulées dans le même sens avait prévalu dans notre système, ces actions bien différentes sur les grosses et petites planètes, sur les astres éloignés et rapprochés du Soleil auraient détruit toute apparence de loi des distances et de loi des rotations planétaires.

Ainsi on peut généraliser une proposition que j'ai déjà énoncée :

L'architecture de masses mobiles dans l'Univers ou immobiles sur la Terre n'est pas produite par l'attraction, mais par les forces qui la dominent : l'attraction ne fait qu'en assurer la stabilité.

Ces considérations m'ont amené à chercher un modèle de mécanisme qui puisse réaliser les caractéristiques architecturales du système solaire avec un régime de stabilité relative (*fig.* 1) :



T, tube pourvu de renflements de rayon a équidistants dans lequel on fait le vide; o, trous percés dans ces renflements; AB, axe autour duquel tourne T; S_1, S_2, S_3, sphères pesantes, obturant les trous o, suspendues par des fils l aux disques tels que AC tournant autour de l'axe AB; S_1', S_2'', S_3''', positions finales moyennes des sphères mobiles.

Le tube T en tournant donnera une impulsion de rotation aux sphères S

(1) E. Belot, *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, p. 19.

d'abord collées à sa surface par l'aspiration interne et, par suite, aux disques AC. Dans l'atmosphère tournante extérieure au tube régnera une attraction centrale $F(R-a)$ due à l'aspiration et dépendant de la distance $(R-a)$ à sa surface. Sans prétendre résoudre le problème très compliqué posé dans le cas où les disques AC tournent par l'impulsion des sphères S, on peut seulement considérer celui où les disques tournent d'un mouvement uniforme ; l'équilibre moyen d'une sphère S'_3 donnera alors

$$\omega^2 R - F(R-a) = g \tang\alpha \qquad \text{avec} \qquad R - a = l \sin\alpha.$$

En outre, on aura pour la $n^{\text{ième}}$ sphère :

$$l_n = n\, l_1.$$

Dès lors le système des sphères S en mouvement aura une architecture tout à fait semblable à celle du système solaire et caractérisée par les points suivants :

1° Il aura une loi des distances moyennes qui seront toujours supérieures à la distance a :

$$R_n = a + f(n, l_1) \qquad (\text{système solaire } R_n = a + C^n).$$

2° Il aura une loi des inclinaisons d'axe :

$$\tang\alpha_n = f_1(R_n) \qquad \left(\text{système solaire } \tang\alpha_n = \frac{4{,}9 - R_n}{4{,}9 - a} \tang 28^\circ\right).$$

Cette loi aura le même énoncé dans les deux systèmes :

A l'origine les axes planétaires sont concourants en un point de la surface du tourbillon.

3° Un tube tourbillonnaire dans un fluide est stable parce que la dépression interne balance la force centrifuge exactement comme le vide dans le tube T maintient les sphères S d'abord collées à sa surface.

4° Un choc sur un tube-tourbillon en divise la surface en ventres et nœuds, et c'est aux ventres que s'échappera la matière parce que, comme dans le modèle, la force centrifuge en S_1 est plus grande que pour une sphère N placée au nœud.

5° Les longueurs variables en progression arithmétique correspondent aux longueurs parcourues par les masses planétaires dans la nébuleuse où elles sont lancées par le tube-tourbillon T se déplaçant dans le sens BA.

6° D'après la théorie du pendule sphérique, les sphères décriraient en plan des ellipses centrées sur la projection de C en supposant ce point immobile; parmi ces ellipses qui se déplacent autour de l'axe AB, une seule pour chaque sphère sera stable, en raison de l'attraction centrale, celle dont le foyer est sur AB. Ainsi le rayon a du tourbillon, qui est la distance minima possible pour une sphère, est aussi l'*excentricité moyenne absolue* (ae) de toutes les orbites.

Appliquons ces données au système solaire où la loi des distances donne $a = 0,29$. La moyenne pondérée des excentricités absolues de Jupiter et de Saturne donne 0,31 avec tendance à une diminution séculaire. L'excentricité maxima de Mercure, d'après Stockwell, est 0,231 : elle correspond à une distance minima du Soleil de 0,297. Ainsi se précise, par trois procédés différents, la détermination numérique du rayon a du tourbillon solaire.

Qu'on vienne, dans le modèle mécanique, à faire disparaître le tube T, l'architecture de tous ses mouvements subsistera sans qu'on puisse soupçonner le mécanisme d'impulsion et découvrir autre chose que l'attraction centrale en équilibre moyen avec la force centrifuge : mais, là comme dans le système solaire, il serait erroné de croire que c'est l'attraction qui a produit l'impulsion dispersive primitive.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur le rôle de l'oxyde de fer et de la chaux employés comme agglomérants dans la fabrication des briques de silice.* Note de M. **Bied**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Au cours de l'année 1916 j'ai eu l'occasion d'étudier le rôle de différents fondants susceptibles d'être employés comme agglomérants dans la fabrication des briques de silice.

Ces essais ont mis en évidence un fait tout à fait imprévu sur lequel je voudrais attirer l'attention: Des quantités notables d'oxyde de fer n'abaissent pas sensiblement le point de fusion de la silice, même en présence de la chaux.

Les éprouvettes des mélanges essayés avaient la forme de galettes de 50^{mm} de diamètre sur 30^{mm} de hauteur. Moulées par compression dans un moule en fonte, elles étaient cuites à une température déterminée par comparaison avec des montres Seger.

Sur les conseils de M. H. Le Chatelier les premiers fondants essayés furent les sels de soude, puis les argiles alcalines, notamment la glauconie, silicate ferri-potassique. C'est en essayant de substituer à la glauconie des mélanges d'oxyde de fer et d'alcalis, puis d'oxyde de fer et de chaux, que j'ai reconnu le peu d'influence du fer sur le point de fusion des briques.

Dans une première expérience, un mélange de 75 parties de sable de Piolenc et de 25 parties de pyrites grillées donna après cuisson pendant 1 heure à 1500° des éprouvettes ayant gonflé de 4 pour 100 et parfaitement dures : le même mélange aggloméré avec une solution de silicate de soude à 43° Baumé donna dans les mêmes conditions des éprouvettes complètement fondues.

En admettant pour le sable de Piolenc à 98 pour 100 de silice un point de fusion de 1750°, on voit que cette température n'est pas abaissée en moyenne de 10° par 1 pour 100 d'oxyde de fer ajouté.

Voulant savoir si la chaux avait en présence du fer une action aussi néfaste que les alcalis, j'ai comparé les deux mélanges suivants, renfermant l'un environ 2 pour 100 de CaO et l'autre environ la même proportion de Na^2O :

Sable de Piolenc	91	91
Pyrite grillée	9	9
Chaux hydraulique du Teil	4	»
Silicate de soude sirupeux	»	10

Après cuisson pendant 1 heure à 1500°, le premier mélange a donné une éprouvette très saine, à arête vive, présentant un gonflement de 3,8 pour 100. Le second mélange montrait un commencement de vitrification ; le gonflement était seulement de 0,8 pour 100.

Une nouvelle série fut faite avec des proportions différentes d'oxyde de fer et de chaux :

Quartz de Souvigny	100	100	100	100	100	100
Pyrite grillée	3	3	4	4	5	5
Chaux du Teil	0	2	0	2	0	4

Résultats après cuisson à 1450°.

Dureté	Non.	Oui.	Non.	Oui.	Non.	Oui.
Gonflement	3,8	3,0	4,0	2,0	4,0	3,0

Résultats après cuisson à 1700°.

Dureté	Non.	Oui.	Non.	Oui.	Non.	Oui.
Gonflement supplémentaire	4,0	2,8	1,8	4,4	1,8	3,0

Le fer seul ne donne donc pas d'agglomération; il ne permet pas la formation du réseau de tridymite. Il est nécessaire de l'associer à la chaux.

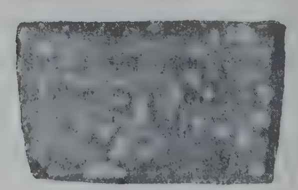
Il restait à mesurer l'influence du mélange de fer et chaux sur le point de fusion. Les expériences ont donné les résultats suivants :

Quartz de Souvigny	100	100
Pyrite de fer grillé	3	»
Chaux du Teil	3	2
Point de fusion	1725°	1730°

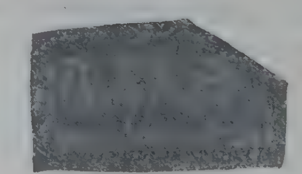
Une bonne brique allemande, marque Stella, a fondu dans les mêmes conditions de chauffage à 1730°. On considérait la montre et les échantillons comme fondus lorsque la pointe de la pyramide s'était suffisamment abaissée pour arriver au niveau du plan de base.

On voit donc qu'une addition de 3 pour 100 d'oxyde de fer et 1 pour 100 de chaux n'abaisse le point de fusion que de 5°, c'est-à-dire d'une quantité ne dépassant guère les erreurs d'expérience.

Brique au fer.



Avant cuisson à 1600°.



Après cuisson à 1600°.

Une brique du mélange ferrugineux maintenue pendant plusieurs jours dans un four d'aciérie à creuset, c'est-à-dire au voisinage de 1600°, gonfla de 1,8 pour 100, mais resta complètement intacte. Les photographies ci-dessus montrent qu'après ce chauffage les grains de quartz ont complètement disparu, comme s'ils s'étaient fondus dans la masse, relevant ainsi le point de fusion par un apport de silice fraîche.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la composition des briques de silice provenant des voûtes de four Martin.* Note de M. E. **Rengade**, présentée par M. H. Le Chatelier.

L'examen des briques de silice provenant des voûtes de four Martin montre que ces matériaux ont subi des modifications profondes. On sait que les plus importantes résultent de la transformation, sous l'influence de la température élevée, du quartz en cristobalite, puis en tridymite étudiée dès le début par M. H. Le Chatelier et sur laquelle de nouveaux et intéressants renseignements ont été tout récemment apportés [1].

Nous étudierons ici plus spécialement les modifications chimiques qui se produisent en même temps dans la brique sous l'influence des poussières du four.

Les très nombreuses briques que nous avons examinées présentent, en général, quatre zones distinctes :

A. La partie inférieure qui a été immédiatement en contact avec les flammes est vernissée et porte parfois des protubérances ou stalactites plus ou moins prononcées indiquant une fusion pâteuse. La cassure est d'un gris clair montrant une masse d'aspect absolument homogène, parfois parsemée de soufflures.

B. Au-dessus, et séparée généralement par une ligne très nette, se trouve une zone noire ou d'un gris très foncé d'aspect également très homogène, de dureté considérable.

C. Zone de transition qui s'annonce le plus souvent par des taches blanches apparaissant au milieu de la zone noire, et représentant les gros grains de quartz initiaux non complètement absorbés. Puis le fond noir fait place à un milieu brun clair où l'on retrouve la structure hétérogène de la brique primitive, qui paraît simplement avoir été imprégnée d'une substance fondue brune.

D. Enfin le haut de la brique n'a subi aucune modification visible.

---

[1] H. Le Chatelier, *Comptes rendus*, t. 111, 1890, p. 123; t. 163, 1916, p. 948. — H. Le Chatelier et Bogitch, *Ibid.*, t. 165, 1917, p. 218.

L'examen au microscope, en lumière polarisée, de lames minces taillées dans les quatre régions précédentes montre en B la structure souvent décrite formée de grands cristaux de tridymite, très transparents; les joints entre ces cristaux sont remplis par une matière noire opaque. Dans la région A on se rend compte que la tridymite a fondu, les gros cristaux ont fait place à des sphérules que le constituant noir opaque entoure sans s'y mélanger. Par refroidissement, la tridymite fondue a donné de la cristobalite et par place des régions biréfringentes de tridymite mal formée. Dans la région C les gros cristaux de tridymite continuent en diminuant peu à peu de taille et de fréquence à mesure qu'on se rapproche des parties moins chauffées, jusqu'à ce qu'on retrouve en D la structure normale de la brique primitive.

Voici maintenant les résultats donnés par l'analyse chimique :

Fours acides.

	N° 1.		N° 3.		N° 2.				N° 5.			
	A.	B.	A.	B.	A.	B.	C.	D.	A.	B.	C.	D.
SiO^2	90,30	87,00	94,30	94,80	79,60	74,76	91,00	95,30	93,60	94,60	93,80	97,50
Al^2O^3	0,00	0,60	0,90	0,50	0,80	1,10	2,70	1,10	0,50	0,40	1,70	0,60
CaO	1,20	2,50	1,30	1,15	0,10	0,30	3,35	1,90	0,25	0,80	3,15	1,40
MgO	Tr.	Tr.	Tr.	Tr.	Tr.	Tr.	0,05	Tr.	Tr.	Tr.	0,04	Tr.
FeO	0,87	0,51	0,08	0,44	5,73	4,47	»	»	1,12	0,36	»	»
Fe^2O^3	6,21	8,44	2,97	2,96	13,62	19,03	2,51	1,27	4,50	3,81	1,37	0,43
Mn^3O^4	0,73	1,32	0,24	0,25	0,29	0,28	0,19	0,20	0,18	0,14	0,20	0,20
	100,21	100,37	99,79	100,10	100,14	99,94	99,80	99,67	100,15	100,11	100,26	100,13
Fe total	5,02	6,30	2,14	2,42	14,00	16,80	1,75	0,88	4,02	2,95	0,96	0,30
Fe sur une autre brique du même four	»	»	10,61	5,20	4,35	4,35	»	»	6,43	7,18	»	»

Fours basiques.

	N° 6.		N° 9.				M° 10.			
	A.	B.	A.	B.	C.	D.	A.	B.	C.	D.
SiO^2	89,00	84,30	89,00	88,80	91,00	97,30	Manque.	88,20	83,80	95,70
Al^2O^3	0,70	0,90	0,80	0,70	1,80	0,70		0,60	1,30	0,50
CaO	2,00	3,40	3,90	3,85	4,20	1,15		1,90	6,30	2,00
MgO	0,20	0,20	0,65	0,72	0,10	Tr.		0,20	0,10	0,12
FeO	1,44	2,57	0,75	0,50	»	»		2,18	1,28	»
Fe^2O^3	5,30	7,65	3,59	4,39	2,56	0,48		6,43	6,29	1,71
Mn^3O^4	0,77	1,04	1,11	1,00	0,52	0,14		0,65	1,02	Tr.
	99,41	100,06	99,80	99,96	100,18	99,77		100,16	100,09	100,03
Fe total	4,84	7,35	3,09	3,47	2,02	0,38		6,20	5,40	1,20
Fe sur une autre brique du même four	3,21	6,81	»	»	»	»		»	»	»

On voit que les régions A et B renferment des quantités de fer très variables, et souvent très considérables. L'état d'oxydation est également variable, mais très voisin de Fe^2O^3. Les régions A sont souvent (mais pas toujours) plus riches en fer que la région B correspondante, ce qui peut s'expliquer en admettant que le constituant noir ferrugineux, qui n'est pas mélangé au constituant siliceux dans la partie fondue A, est aspiré par capillarité en B entre les cristaux de tridymite. Il semble également que la chaux contenue dans la brique chemine de même par capillarité à l'état de silicate fusible qui imprègne la région C, aux dépens de A et B qui s'appauvrissent (dans les fours acides).

L'aspect gris et noir de A et B n'est donc pas en rapport avec la teneur en fer, mais provient de ce que les grands cristaux de tridymite de B sont très transparents, tandis que la structure confuse de la silice en A la rend translucide.

Enfin, il est remarquable que la fusibilité des briques n'est pas sensiblement modifiée par de très fortes proportions d'oxyde de fer, comme nous avons pu nous en assurer directement, et comme cela résulte d'ailleurs de l'excellente tenue au four des briques les plus imprégnées.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur le nitrate neutre de zirconyle.* Note (1) de M. **Ed. Chauvenet** et de Mlle **L. Nicolle**, présentée par M. A. Haller.

Les combinaisons nitriques du zirconium étaient mal connues : le nitrate neutre se préparerait, disent les ouvrages didactiques, en évaporant dans le vide sec sur de la potasse caustique une dissolution azotique d'hydrate de zirconium; on obtiendrait de cette manière des cristaux incolores répondant à la composition $(NO^3)^4Zr.5H^2O$, fumant à l'air et très solubles dans l'eau; si la dissolution est chauffée à 75°, elle laisserait déposer $(NO^3)^2ZrO.2H^2O$; enfin si la liqueur est évaporée à plusieurs reprises, elle abandonnerait finalement une masse vitreuse de $[NO^3, ZrO, OH]$, laquelle serait soluble dans l'eau si on ne la dessèche pas au-dessus de 100°.

Nous avons repris cette étude et nous sommes arrivés à des résultats quelque peu différents.

Nous avons d'abord cherché à isoler le nitrate neutre de zirconium soit anhydre, soit hydraté. Dans ce but, nous avons répété l'expérience précé-

(1) Séance du 6 mai 1918.

demment signalée, sans pouvoir réussir à obtenir le nitrate de zirconium; nous l'avons alors modifiée de la manière suivante : l'évaporation de la dissolution très concentrée (presque sirupeuse) a été faite à basse température dans un courant de gaz carbonique chargé de vapeurs nitriques; même dans ces conditions, il nous a été impossible de reproduire le nitrate neutre; le sel que nous avons eu en mains n'était autre que du nitrate de zirconyle. Nous concluons donc que l'existence du nitrate de zirconium est douteuse.

En opérant dans les conditions précédentes, on obtient toujours le nitrate neutre de zirconyle bihydraté $Zr\genfrac{<}{}{0pt}{}{O}{(NO^3)^2}.2H^2O$; ce produit est cristallisé, il est inaltérable à l'air et dans le vide secs; il ne fume pas à l'air s'il est totalement débarrassé d'acide azotique libre. Nous avons tenté de le déshydrater, espérant isoler le nitrate neutre de zirconyle; nous avons chauffé le bihydrate à la température la plus basse possible dans un courant de CO^2 saturé de vapeurs nitriques; même avec ces précautions, le nitrate perd de l'acide nitrique : la perte d'acide nitrique accompagne toujours l'élimination d'eau. Il nous a donc été impossible d'obtenir le nitrate neutre de zirconyle anhydre.

Nous avons enfin recherché toutes les combinaisons hydratées possibles de ce produit : ayant fait des mélanges très variés de $Zr\genfrac{<}{}{0pt}{}{O}{(NO^3)^2}.2H^2O$ avec H^2O, nous avons évalué la chaleur de fixation de ces *n* molécules d'eau sur le bihydrate.

$Zr\genfrac{<}{}{0pt}{}{O}{(NO^3)^2}$	$2H^2O + aq.$	=	$Zr\genfrac{<}{}{0pt}{}{O}{(NO^3)^2}$ diss.	Cal $+2,17$
»	$3H^2O + aq.$	=	»	$-0,50$
»	$3,5H^2O + aq.$	=	»	$-1,92$
»	$4,17H^2O + aq.$	=	»	$-2,77$
»	$4,76H^2O + aq.$	=	»	$-3,95$
»	$6H^2O + aq.$	=	»	$-5,90$

La courbe construite avec ces données présente un seul point anguleux correspondant à la composition $Zr\genfrac{<}{}{0pt}{}{O}{(NO^3)^2}.3,5H^2O$; nous avons retrouvé facilement cet hydrate; il se forme à 0°, il n'est stable que jusqu'à 10°; à la température ordinaire il s'effleurit rapidement et il donne le dérivé à 2^{mol} de H^2O.

En résumé, il résulte de cette étude :

Que le nitrate de zirconium anhydre ou hydraté n'existe pas;
Que le nitrate de zirconyle anhydre n'existe pas;
Qu'à la combinaison précédente correspondent deux hydrates, l'un à 2, l'autre à 3,5 H^2O.

Dans une prochaine Note nous ferons connaître d'une part le résultat de nos expériences sur l'hydrolyse du nitrate de zirconyle, et d'autre part l'existence de nitrates basiques.

CHIMIE INDUSTRIELLE. — *Traitement des eaux de lavage dans la fabrication de la soie artificielle.* Note de M. **de Chardonnet**, présentée par M. Bertin.

La fabrication de la soie artificielle à base de collodion exige une dépense d'environ 4^{m^3} d'eau par kilogramme de soie produite. Les eaux provenant du lavage des pyroxyles, d'une part, et de la dénitration d'autre part, sont réunies, les secondes neutralisant les premières en partie seulement.

Les eaux d'évacuation contiennent par mètre cube : acide nitrique $0^{kg},650$; acide sulfurique $1^{kg},100$; soufre $0^{kg},175$; calcium $0^{kg},110$. Il reste 1^{kg} à $1^{kg},500$ d'acide libre par mètre cube. Le soufre est précipité à l'état de poussière extrêmement ténue.

Généralement il n'est pas permis de jeter ces eaux telles quelles dans les égouts ou les rivières. Il faut alors les neutraliser économiquement en observant les précautions suivantes :

Afin d'éviter dans les conduites les dépôts de soufre, qui se produisent au moment du mélange des eaux acides venant de la nitration et des eaux alcalines venant de la dénitration, on fait écouler ces eaux séparément, par des tuyaux de grès, dans un premier petit étang de neutralisation. Par-dessus le débouché des deux tuyaux dans l'étang, on construit une baraque ou coffrage en planches jointives, pour garantir l'usine et le voisinage contre les vapeurs nitreuses qui se dégagent en abondance à la rencontre des deux liquides.

De ce premier étang, les eaux passent successivement dans leurs autres étangs fermés par des déversoirs en pilotis qui maintiennent le niveau des eaux à une profondeur de $0^m,80$ à 1^m. Ces étangs reçoivent un chargement, également réparti et toujours maintenu en excès, de calcaire tendre con-

cassé, ou, mieux, de chaux vive, si l'on en trouve à proximité (comme par exemple de la chaux de défécation des sucreries).

Les libres acides se trouvent neutralisés par leur contact avec le calcaire. Pour une production de 1000^{kg} de soie par jour, les étangs couvrent une superficie d'environ un demi-hectare, c'est-à-dire que l'eau y séjourne en moyenne environ 24 heures. La quantité d'eau est plus que suffisante pour dissoudre le sulfate de chaux formé aussi bien que le nitrate de chaux. Tout se trouve donc dissous, et il n'y a jamais à curer les étangs. Quant au soufre, la plus grande partie reste en suspension et s'écoule avec les eaux neutralisées, en leur communiquant une teinte opaline. Si l'on veut masquer cette teinte, on ajoute dans les étangs des riblons ou des sels de fer qui se combinent au soufre en lui donnant une teinte noire. C'est ce qui a dû être fait à Besançon, les eaux de l'usine se déversant dans le Doubs, immédiatement en amont de la ville.

Ces eaux neutralisées sont éminemment fertilisantes. On observe, à l'usine de Hongrie notamment, que sur le bord des étangs et le long du canal ouvert, d'environ 2^{km} de long, conduisant la vidange de l'usine à la rivière la Raabe, les herbes prennent un développement extraordinaire. Pour constater leur innocuité, en ce qui concerne les animaux, on a installé sur les étangs une troupe de canards qui y vivent grassement pendant les opérations et qui défient toute réclamation de la part des riverains ou des inspecteurs royaux de l'agriculture.

SISMOLOGIE. — *Résultats des études sur le tremblement de terre d'août et de septembre 1912 sur la mer de Marmara.* Note de M. **Mihaïlovitch Yélénko**, présentée par M. Bigourdan.

Le 9 août 1912, à $1^h 31^m 16^s$ (t. m. Gr.) se manifesta un grand tremblement de terre sur les rives de la mer de Marmara et dans les Dardanelles. De fortes secousses se sont renouvelées le 10 août, à $9^h 24^m 25^s$ et à $18^h 32^m 42^s$. Tous ces séismes ont été enregistrés par les sismographes du monde entier. En outre, les appareils des stations plus voisines de l'épicentre marquèrent encore six secousses : le 9 août, à $5^h 27^m 39^s$, $6^h 10^m 2^s$, $9^h 50^m 10^s$, $13^h 58^m 5^s$ $18^h 58^m 20^s$ et $22^h 11^m 15^s$; le 10 août à $1^h 22^m 28^s$ et $14^h 13^m 10^s$; et, le 11 août, à $7^h 22^m 8^s$. Après cela, une accalmie se produisit dans cet épicentre, jusqu'au moment où l'équilibre des couches terrestres y fut de nouveau dérangé le 13 septembre suivant, moment où,

vers minuit, il se produisit de nouveau un terrible choc, à $23^h 34^m 45^s$, puis encore deux autres, enregistrés dans quelques stations voisines : le 16 septembre à $21^h 8^m 12^s$ et le 17 septembre à $1^h 14^m 18^s$. A part les séismes qui viennent d'être mentionnés, il se produisit sur la même surface, parfois en des lieux isolés et sur des surfaces peu étendues, encore d'autres secousses nombreuses de faible intensité, au total 314 chocs. Tous ces mouvements constituent une période sismique nettement accentuée, dans laquelle les chocs catastrophiques se renouvelèrent durant 39 jours.

D'après la grandeur de l'énergie, cette catastrophe dépasse celle de Messine, du 28 décembre 1908. J'ai étudié ce phénomène sur place, où je suis resté 5 semaines.

En attendant une publication plus développée, voici les résultats obtenus, avec quelques considérations sur les causes des ébranlements cités.

Les recherches peuvent se résumer en général à ceci :

1° Les mouvements de la période sismique mentionnée se rattachent à trois surfaces pléistoséistes :

a. La principale est en Thrace orientale, sur la rive ouest de la mer de Marmara, le long de la pente orientale de Tekhir-Dagh;

b. Dans le bassin du lac Appolonia, en Asie Mineure;

c. Sur les côtes de l'Asie Mineure du détroit des Dardanelles.

On dirait que ce principal mouvement de Tekhir-Dagh a suscité les chocs de relais sur le lac Appolonia et aux Dardanelles; ceux-ci auraient chacun donné ses propres séismes autonomes d'une énergie plus faible. Les effets destructifs de cette catastrophe se sont manifestés ainsi : destruction de nombreuses habitations avec beaucoup de victimes humaines; de grands changements sur la surface de la terre par les mouvements et l'affaissement du sol; de grands glissements de terrain et formation de longues, larges et profondes crevasses; apparition de nouvelles sources et dessèchement des anciennes.

2° Sur le pléistosiste de Thrace, presque toutes les habitations sont détruites.

3° Les mouvements de la surface ont été compliqués sur une grande étendue. Sur les surfaces des trois pléistosistes se manifestèrent particulièrement des mouvements verticaux, mais il y a de nombreux exemples de coups de côté et surtout du nord-ouest.

Le premier choc du 9 août s'est manifesté sur le pléistosiste de Tekhir-

Dagh et des Dardanelles, le second (10 août) sur le pléistosiste de Tekhir-Dagh et dans la région de dépression du lac Appolonia; et le troisième (13 septembre) dans le golfe de Saros, sur la rive occidentale de la péninsule de Gallipoli. Le déplacement de l'épicentre s'est clairement dessiné.

Les résultats sur les causes. — D'après l'état général des circonstances sismiques de la péninsule balkanique, et suivant les faits que je viens d'étudier, je suis arrivé aux conclusions suivantes :

1° On doit considérer tous ces événements comme des mouvements tectoniques du bassin de la mer de Marmara, dont l'équilibre est loin d'être encore atteint, et de la partie nord de la mer Égée, c'est-à-dire à deux grandes failles qui séparent le bassin de Marmara à l'ouest de la masse archéenne du Rhodope et à l'est de la masse archéenne d'Anatolie. L'action sismique a été rajeunie au commencement de cette période par un fort choc du N-O, probablement par l'intermédiaire du bassin d'Andrinople.

2° La principale cause de la sismicité très accusée des terrains balkaniques est due aux rapprochements de trois systèmes différents de formations montagneuses dont chacun est accompagné de ses accidents tectoniques : les plissements alpins et surtout la branche du Sud-Est ou le système dinarique, les plissements carpatho-balkaniques et le vieux continent oriental ou la masse du Rhodope, avec tous ses fragments, qui s'insinue en coin entre les deux autres systèmes. Toutes ces formations et les dislocations résultantes donnent des circonstances favorables à une sismicité très élevée.

3° La masse du Rhodope est en partie disloquée, même démembrée. Le fractionnement de la masse se continue, et les blocs se meuvent encore. Certains fragments, par leurs mouvements, jouent un rôle sismogénique, c'est-à-dire qu'en poussant les couches disloquées, ils provoquent, le long de certaines failles et de leurs systèmes, des séismes de différentes intensités. Les mêmes phénomènes de démembrement et de percussion sont produits aussi par la masse archéenne d'Anatolie; de là les accidents sismogéniques du côté de l'Asie Mineure, comme ceux qui se produisent du côté de la Thrace. On peut, de cette manière, expliquer de fréquentes et grandes catastrophes sismiques sur la Péninsule balkanique, dans le bassin de la mer de Marmara et dans les lieux du nord-ouest de l'Asie Mineure.

BOTANIQUE. — *Sur les plantules d'une Laminaire à prothalle parasite* (Phyllaria reniformis *Rostaf.*). Note de M. C. SAUVAGEAU, présentée par M. L. Guignard.

J'ai indiqué dans ce recueil, en 1915 et 1916, comment nos Laminaires de l'Océan se reproduisent sexuellement et développent leurs plantules. Je me suis proposé de compléter cette étude sur le *Phyllaria reniformis*, plante éphémère, en partie méditerranéenne, qui vit à Banyuls-sur-Mer aux environs immédiats du Laboratoire Arago, un peu au-dessous du niveau de l'eau, sur des rochers peu éclairés ou légèrement en surplomb; les circonstances ne m'ont pas permis de le rechercher dans la profondeur. D'après mes observations et celles dont je suis redevable à mon ami M. Fage, zoologiste attaché au service maritime des pêches, le *P. reniformis* y apparaît vers la fin de l'hiver et disparaît en été; on ignore comment il passe l'automne et son prothalle est inconnu.

Des nombreux envois que le Laboratoire Arago m'expédiait, en 1914, 1915, 1916, un seul m'a fourni des déhiscences; les autres se gâtèrent en route; les zoospores, munies d'un chromatophore et d'un point rouge, germèrent en tube étroit, presque aussitôt après leur transformation en embryospores, comme celles des Laminaires de l'Océan; les germinations périrent le lendemain, tuées par la chaleur de mon laboratoire. Durant un séjour en avril dernier à Banyuls, je n'ai pu recommencer les expériences de culture, car j'ai trouvé seulement de jeunes individus; en outre, la mer fut quasi constamment houleuse. J'ai donc cherché des plantules au hasard, sur des morceaux de rochers ou de *Lithophyllum* enlevés à l'aide d'un outil longuement emmanché. J'en ai ainsi obtenu une centaine dont les plus jeunes mesuraient 200^{μ}.

Les plantules monostromatiques sont toujours pilifères; les assises basilaires de la lame, aussi régulièrement concentriques que celles du *Saccorhiza bulbosa*, sont engendrées par une zone stipo-frondale aussi nettement marquée. La lame polystromatique possède des solénocystes, des cellules multiclaves, etc. du même type que chez le *S. bulbosa* [1]. Par contre, le stipe des plantules offre de remarquables particularités. Le stipe monosi-

---

[1] Cf. C. SAUVAGEAU, *Recherches sur les Laminaires des côtes de France* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. 56, 1918; sous presse).

phonié des plus jeunes se compose de quelques cellules supérieures aplaties et d'une longue cellule cylindrique basilaire, à parois épaisses, dressée sur le *Lithophyllum*. Tandis que la cellule basilaire conserve ses dimensions initiales, les cellules supérieures augmentent de nombre par la division stipo-frondale, s'élargissent, se cloisonnent, la débordent, émettent des prolongements corticants qui la recouvrent graduellement, descendent en revêtement dense et épais jusque sur le support où ils forment à la plantule une base circulaire épatée. La plantule est dès lors solidement fixée. Cependant, la cellule basilaire n'est pas entièrement inactive; elle est très inégalement divisée vers le haut par une paroi plane, bombée ou oblique, et la portion inférieure semble faire une poussée dans la portion supérieure. Si cette poussée est oblique, elle peut engendrer un prolongement exsert qui devient une plantule latérale dont la cellule basilaire continue celle de la plantule mère. Si ce prolongement apparaît de bonne heure, les deux plantules sont à peu près de même taille. S'il apparaît tardivement, il traverse la cortication et la première plantule est notablement plus avancée que la seconde; cette différence s'atténue dans la suite et l'on distingue mal si deux plantules contiguës, hautes de quelques millimètres, sont nées l'une de l'autre ou côte à côte. Bien que les moins nombreuses, les plantules à stipe ramifié ne sont pas rares. La disposition de cette cellule basilaire vivante et à parois épaisses, par rapport à la plantule, rappelle celle de l'oogone vidé chez les autres Laminaires étudiées.

J'ai rencontré toutes les plantules sur le *Lithophyllum lichenoides* [1], aucune sur le rocher, mais leur insertion épiphyte n'est qu'apparente. En réalité, la cellule basilaire continue et surmonte une file plus ou moins verticale de cellules aplaties et à parois minces incluses dans son épaisseur, observable seulement après décalcification. Sur certaines files profondes, j'ai pu compter douze cellules superposées sans arriver jusqu'à leur origine; toutefois, dans l'une de mes dissections, la plus inférieure d'entre elles s'insérait sur une cellule étroite, allongée dans le sens perpendiculaire, qui semblait le témoin d'un filament monosiphonié parallèle à la surface de l'hôte. La file de cellules incluses persiste longtemps; j'ai observé celle de plantules dont l'importance de la cortication égalait plusieurs fois le diamètre de la cellule basilaire.

En l'absence de cultures, la stratification de l'épaisse paroi de cette

---

[1] J'en dois la détermination à l'obligeance de Mme Paul Lemoine.

curieuse cellule basilaire permet d'interpréter ce qui précède. La cellule basilaire correspond en totalité à l'oogone vidé des autres Laminaires, postérieurement rempli et renforcé par le haut et par le bas. Sa portion supérieure serait un rhizoïde interne, mais large et court; sa portion inférieure résulterait de la prolifération et de l'invagination précoces de la cellule sous-jacente; pareil phénomène se rencontre d'ailleurs parfois dans les cultures des autres Laminaires; ici, il serait constant et les parois s'appliquent intimement l'une contre l'autre. Par suite, la ramification des plantules ne serait qu'une apparence due à la persistance et à la rigidité de la paroi de l'oogone renforcé, et le filament parasite dans le *Lithophyllum* représenterait le prothalle. L'apparition d'une plantule latérale sur une plantule fortement cortiquée, probablement due à une seconde invagination, indiquerait une longue survie du prothalle.

Un *Lithophyllum* ne s'accroissant pas en épaisseur, hormis quand il produit des protubérances, ne peut englober le prothalle du *P. reniformis*. On sait, en outre, que des *Lithophyllum* voisins se soudent en grandissant et emprisonnent des corps étrangers, mais pareille cause d'erreur ne peut être invoquée ici. Le prothalle traverse donc l'Algue calcaire à la manière d'un parasite (intercellulaire ou intracellulaire ?), la dissout sur son passage jusqu'au moment où, venant au jour, il forme aussitôt un oogone qui persistera comme cellule basilaire de la plantule.

On se demandera si ce mode inaccoutumé d'existence dans une Algue calcaire est devenu une adaptation nécessaire pour le *P. reniformis*, s'il entraîne l'apogamie et comment s'y fait la première pénétration.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *La réaction d'Adamkiewicz est-elle due à l'acide glyoxylique ou à l'aldéhyde formique?* Note [1] de M. E. **Voisenet**, présentée par M. E. Roux.

Hopkins et Cole [2] ont montré que l'emploi de l'acide acétique dans la réaction d'Adamkiewicz introduit une substance nécessaire à la production de la coloration violette, et l'ont attribuée à de l'acide glyoxylique.

J'ai fait connaître une nouvelle réaction colorée violette des albumi-

(1) Séance du 6 mai 1918.

(2) *Proc. Roy. Soc.*, t. 68, 1901, p. 21.

noïdes [1], obtenue par action des acides sulfurique ou chlorhydrique, très légèrement nitreux, sur la substance protéique en présence d'une trace d'aldéhyde formique.

Pour les raisons suivantes, j'estime que la matière colorante de ces réactions est la même et que le *méthanal* est le corps *nécessaire* et *suffisant* à sa production :

1° Similitude des modes de formation et de propriétés physiques et chimiques des matières colorantes.

Comme ma réaction, celles d'Adamkiewicz, d'Hopkins et Cole, peuvent être réalisées avec mon réactif acide chlorhydrique nitreux. Indépendamment de la propriété oxydante de sa molécule, l'acide sulfurique qui sert à les reproduire contient habituellement et en quantite suffisante, des traces de corps oxydants, oxydes de l'azote, de l'arsenic et du sélénium.

En concentration convenable, chacune des liqueurs violettes montre dans le spectre une bande d'absorption entre les lignes D et E de Fraunhofer.

Les matières colorantes sont également sensibles à l'action des réactifs oxydants ou réducteurs : en particulier, ma réaction effectuée avec un excès d'aldéhyde formique donne une coloration *jaune*, et l'on ne peut reproduire celle d'Adamkiewicz avec un acide sulfurique trop nitreux.

2° La réaction de l'acide glyoxylique avec les matières albuminoïdes, en présence d'un acide fort, fournit une coloration violette qui doit être attribuée à de l'aldéhyde formique résultant de sa décomposition, et pouvant même y figurer comme impureté de préparation.

D'abord, l'aldéhyde formique satisfait à la réaction d'Adamkiewicz et les expériences suivantes révèlent en outre l'extrême sensibilité de cette réaction pour cet aldéhyde, l'addition de 3 gouttes de formol à un litre d'eau fournissant une liqueur à pouvoir chromogène intense.

Si à 1^{cm^3} d'une solution de blanc d'œuf dans de l'acide acétique ne donnant pas la réaction d'Adamkiewicz, on ajoute 1^{cm^3} de cette eau formolée, puis 3^{cm^3} d'acide sulfurique, avec les précautions opératoires connues, on obtient la coloration violette de cette réaction.

Si à 2^{cm^3} de la solution d'eau formolée, on ajoute 5 gouttes de blanc d'œuf battu, puis 3^{cm^3} d'acide sulfurique, on obtient une coloration violette comme avec l'acide glyoxylique.

Ensuite, l'acide glyoxylique est facilement décomposable en anhydride carbonique

---

(1) *Bull. Soc. chim.*, t. 33, 1905, p. 1198.

et aldéhyde formique. En chauffant avec l'eau, à 140°, le glyoxylate d'isobutyle, Bouveault et Wahl [1] ont reconnu ce fait : Hopkins et Cole, eux-mêmes, l'ont admis par ce qui suit. Cette décomposition s'effectue aisément par les acides forts, notamment l'acide sulfurique. Les expériences suivantes, avec l'acide chlorhydrique, montrent la transformation progressive, presque quantitative de l'acide glyoxylique en méthanal.

En ajoutant, dans deux tubes, 1 goutte d'une solution de formol à 35 pour 100 dilué au centième, et 1 goutte d'une solution d'acide glyoxylique pur à $0^g,86$ pour 100, ce qui réalise une équivalence de méthanal libre et latent, puis 5 gouttes et 3^{cm^3} de mes réactifs, eau albumineuse et acide chlorhydrique nitreux; après mélange, il se produit aussitôt dans la liqueur formolée, à température ordinaire, une coloration violette devenant intense en une demi-heure; la liqueur glyoxylique n'a pris lentement qu'une légère teinte violacée : en portant au bain-marie à 50° pendant une demi-heure, la coloration de cette dernière liqueur croît progressivement, mais en restant un peu inférieure à celle de la première demeurée constante : à ce moment, l'ébullition établit sensiblement l'égalité de teinte. L'examen spectroscopique de chaque liqueur montre une raie d'absorption identique par la délimitation de ses bords en longueur d'onde.

En opérant seulement avec 2 à 3 gouttes d'eau albumineuse, la liqueur formolée donne la coloration violette, la liqueur glyoxylique une coloration orangée, stable, mais devenant violette après addition nouvelle de 3 à 2 gouttes d'eau albumineuse et avec autant d'intensité que dans l'essai précédent. L'acide chlorhydrique nitreux, agissant sur les mêmes doses d'eau albumineuse seule, donne une liqueur incolore ou jaunâtre.

Ces deux expériences identifient, en dernière analyse, les réactions colorées de l'acide glyoxylique et du méthanal avec les albuminoïdes, identification que j'ai reconnue pour d'autres réactions colorées de ces aldéhydes. La première phase de la seconde laisse entrevoir en outre, avec ces substances, la réaction colorée propre à l'aldéhyde glyoxylique : j'espère expliquer la dérivation de la deuxième phase et révéler ainsi le mécanisme de la réaction d'Hopkins et Cole.

Habituellement cette réaction est reproduite avec une solution d'acide glyoxylique préparée par réduction de l'acide oxalique. La coloration violette est alors due en partie et directement à de l'aldéhyde formique : la liqueur de réduction satisfait aux caractères analytiques de cet aldéhyde et de l'anhydride carbonique figure dans le dégagement gazeux.

3° Production d'aldéhyde formique par oxydation ménagée de l'acide acétique.

Il suffit de lire le Mémoire d'Hopkins et Cole pour reconnaître que, de

(1) *Bull. Soc. chim.*, t. 31, 1904, p. 682.

l'ensemble de leurs expériences même, c'est à l'aldéhyde formique plutôt qu'à l'acide glyoxylique qu'il convenait d'attribuer le pouvoir chromogène.

L'oxydation par l'eau oxygénée, en présence de sulfate ferreux, ayant communiqué un fort pouvoir chromogène à de l'acide acétique qui n'en possédait pas, les amena à étudier ce phénomène où ils reconnurent *nettement* la production, en quantité relativement notable, de l'aldéhyde formique et *vraisemblablement* celle de l'acide glyoxylique : « Mais il est certain, affirment-ils, que l'aldéhyde formique ne donne pas la réaction protéique et sa formation, quand on traite ainsi l'acide acétique, *semble* fournir par cela même la preuve qu'il s'est produit de l'acide glyoxylique pendant le processus. »

Ainsi, c'est pour avoir méconnu cette propriété de l'aldéhyde formique de donner *certainement* la réaction protéique qu'ils l'ont attribuée *vraisemblablement* à de l'acide glyoxylique. Quant à leur conviction erronée à l'égard du méthanal, il est logique d'en rapporter la cause à l'influence empêchante d'un excès de ce corps dans leur expérience de contrôle.

De l'aldéhyde formique se produit donc dans l'oxydation ménagée de l'acide acétique, même par l'oxygène de l'air, surtout à la lumière, et ce fait a été reconnu par Hopkins et Cole eux-mêmes. J'ai constaté encore la production de traces de ce corps dans la décomposition d'un acétate par l'acide sulfurique, et des acétates cuivrique ou mercurique par voie sèche. L'expérience montrant qu'une solution d'albumine dans un acide acétique ainsi altéré donne ma réaction colorée de l'aldéhyde formique, vérifie ces diverses modalités de formation et contribue par l'étude de cette réaction à l'explication définitive de celle d'Adamkiewicz.

A 15 heures trois quarts l'Académie se forme en comité secret.

La séance est levée à 17 heures et demie.

A. Lx.